Résolution des Équations Différentielles

Nicolas Holzschuch

Cours d'Option Majeure 2

Nicolas.Holzschuch@imag.fr

Résolution des Équations Différentielles

- Très inspiré par le cours:
  - A. Witkin & D. Baraff, *Physically Based Modelling*, cours à Siggraph 2001

http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001/index.html

  (pointeur sur la page web)

- Et surtout :
  - *Differential Equation Basics*
  - *Implicit Methods*

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Retour sur le TD4

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Équations Différentielles Ordinaires

- ODE
  - Ordinary Differential Equations
- Lien entre dérivée et valeur de la fonction

$$f'(x) = F(f(x))$$

- « Ordinaires » : fonction d'une variable
- Différent des EDP
  - Équations aux Dérivées Partielles
  - Fonction de plusieurs variables

Équations Différentielles

- Forme générique ODE premier degré :

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = f\left(\mathbf{X}(t), t\right)$$

$$X : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

- Notes:
  - t représente le temps
  - f variable en fonction du temps
  - Parfois **Y** au lieu de **X**, parfois x au lieu de t,…
  - Souvent $\mathbf{X}=(x,y)$

À quoi ça sert ?

- À tout… ou presque !
  - Chimie
  - Physique
  - Ingénierie
  - Économie…
- Également en Informatique Graphique :
  - Animation, modélisation, rendu…
- ODE système de base
  - EDP application des méthodes d'ODE

Résolution des Équations Différentielles

- Déjà vues
- Le plus souvent, résolution analytique

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta > 0, & y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \\ \Delta < 0, r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta, & y = e^{\alpha x}(p\cos(\beta x) + q\sin(\beta x)) \\ \Delta = 0, & y = (\lambda x + \mu)e^{rx} \end{cases}$$

- Nombreux problèmes sans solution analytique
  - Par ex. pb. à 3 corps
  - Résolution numérique

Résolution numérique

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = f\left(\mathbf{X}(t),t\right)$$

- Étant donnée la fonction $f(\mathbf{X},\mathrm{t})$, calculer $\mathbf{X}(\mathrm{t})$
- Le plus souvent, valeur initiale :
  - Valeur $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$
  - Trouver $\mathbf{X}(t)$ pour $t > t_0$
- Également :
  - problème aux limites, contraintes…

Résolution pour l'animation

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 \qquad t = t_0$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = f\left(\mathbf{X}(t), t\right) \qquad t \geq t_0$$

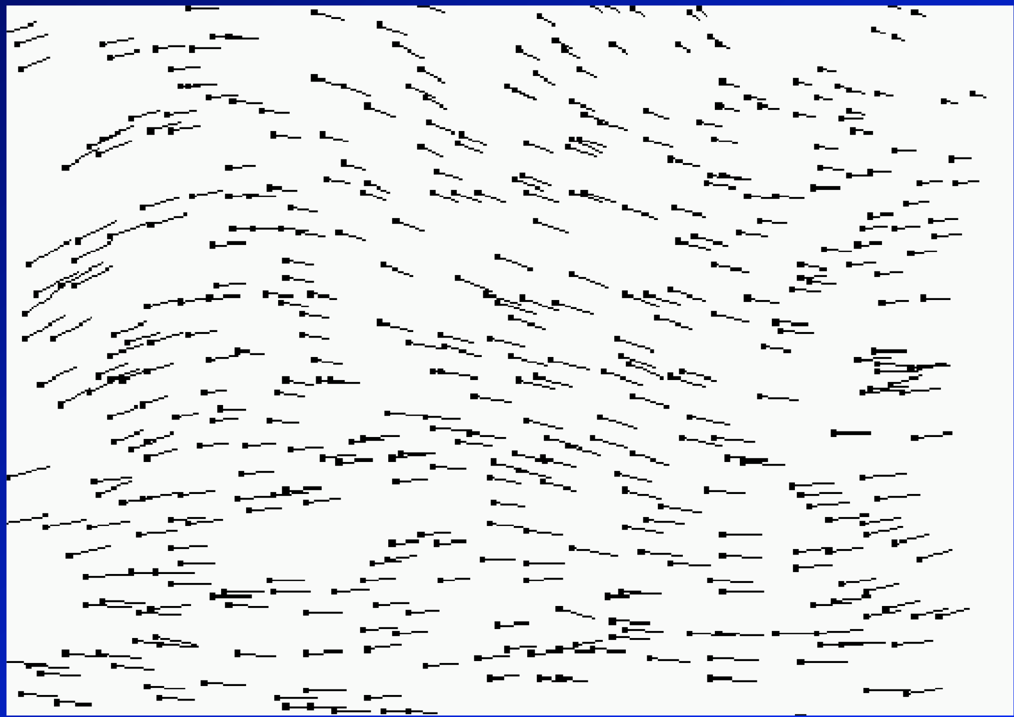
- Pour l'animation, série de valeurs
  - Échantillons de la fonction X(t)

$$\mathbf{X}(t_i) \qquad t_i = t_0, t_1, t_2, \ldots$$

  - Par exemple, images d'une animation

Champ de vecteurs

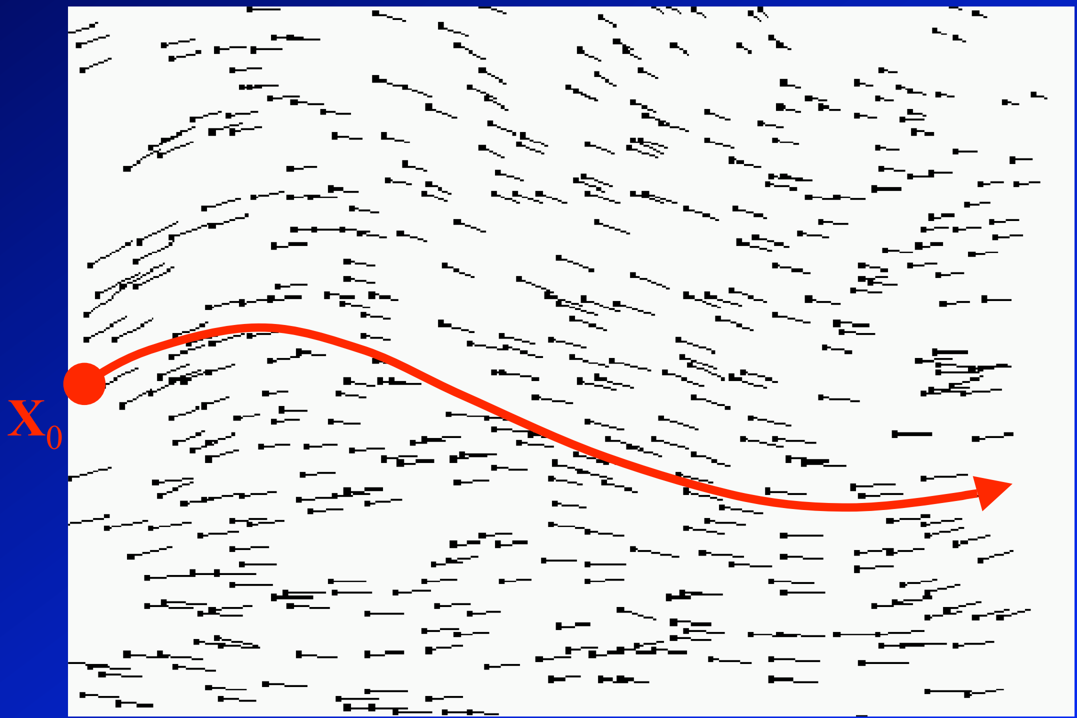
- *f*(**X**,t) est un champ de vecteurs :



- Éventuellement variable en fonction du temps

Champ de vecteurs

- $f(\mathbf{X},t)$ est un champ de vecteurs :



- $\mathbf{X}(t)$ est un chemin dans le champ
  – trajectoire

ODE d’ordre plus élevé

- Par exemple, dynamique = ODE d’ordre 2 :

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{1}{m}F$$

- On se ramène à une ODE d’ordre 1 :

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(t)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}F(x,v,t)$$

Espace des phases

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m} F(x, v, t) \end{bmatrix}$$

- Equation de degré 1 :
  - À deux dimensions
  - Remplace équation de degré 2 à une dimension

Pour une particule 3D

- ODE, de degré 1, de dimension 6 :

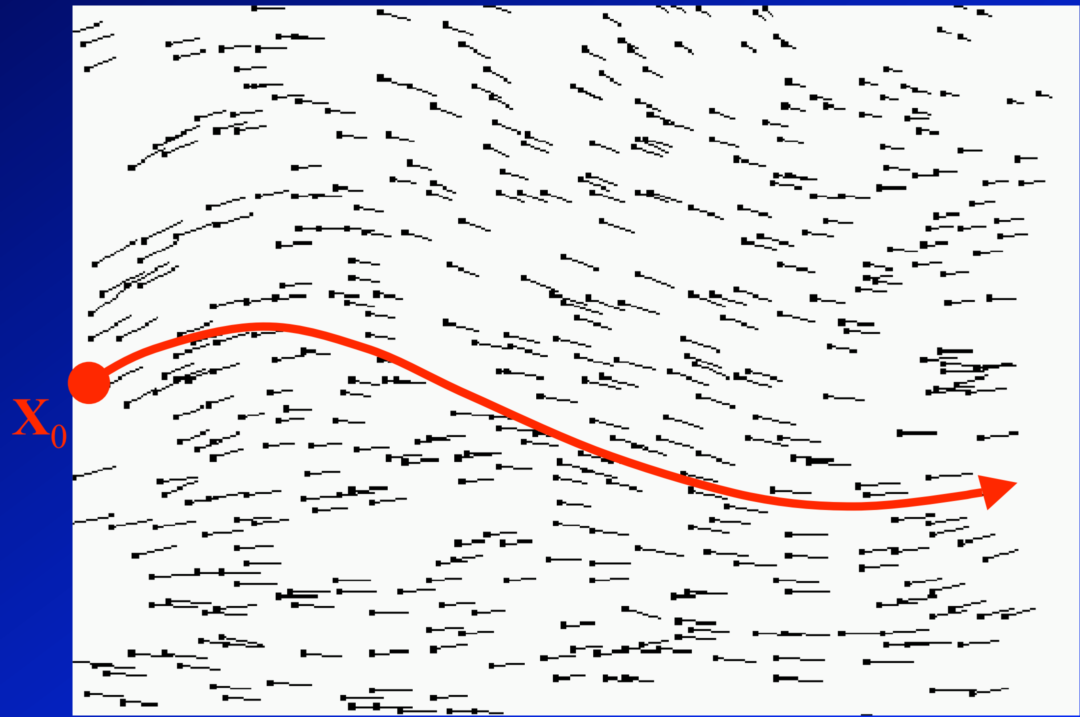
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad f(\mathbf{X}, t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \frac{1}{m} F_x(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_y(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_z(\mathbf{X}, t) \end{pmatrix}$$

Pour un ensemble de particules 3D

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \\ v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \\ p_x^2 \\ p_y^2 \\ p_z^2 \\ v_x^2 \\ v_y^2 \\ v_z^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad f(\mathbf{X},t) = \begin{bmatrix} v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \\ \frac{1}{m} F_x^1(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m} F_y^1(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m} F_z^1(\mathbf{X},t) \\ v_x^2 \\ v_y^2 \\ v_z^2 \\ \frac{1}{m} F_x^2(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m} F_y^2(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m} F_z^2(\mathbf{X},t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ça reste un chemin

- Chemin dans l'espace des phases :

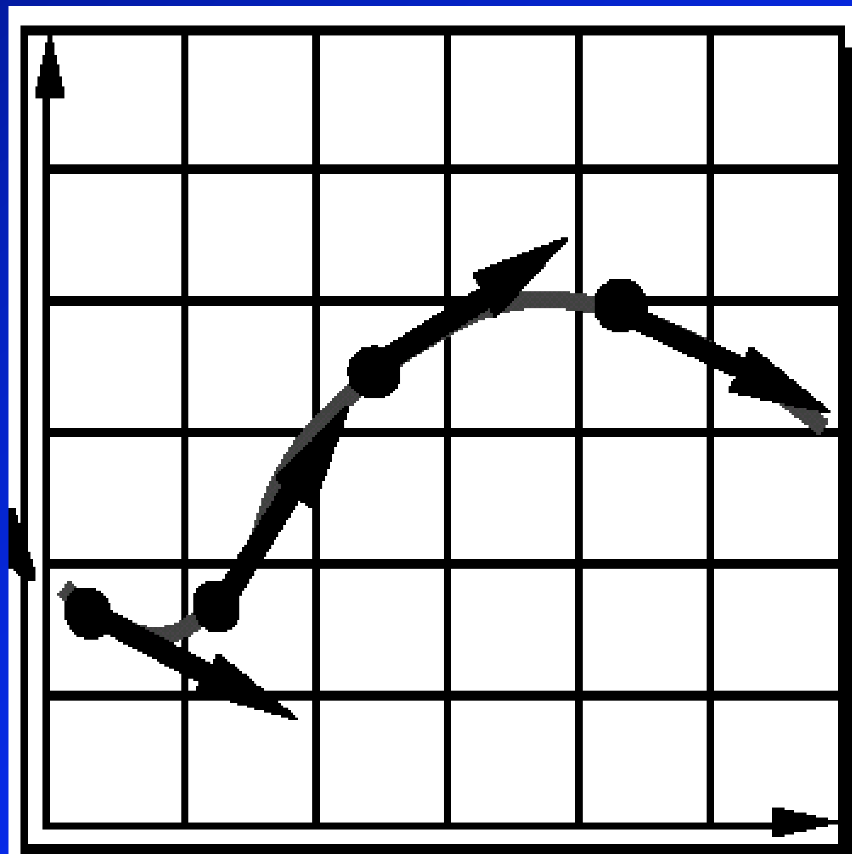


- Pour nous, c'est un tableau de nombres

Idée intuitive : par étapes

- État courant **X** donné
- Calculer *f*(**X**,*t*) à l'état courant (ou à proximité)
- Avancer d'un pas
- Prendre nouvelle valeur **X**

- La plupart des méthodes suivent ce schéma



Note : équations intégrale

- L'équation différentielle :

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 & t = t_0 \\ \dfrac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = f\left(\mathbf{X}(t),t\right) & t \geq t_0 \end{cases}$$

- Est équivalente à l'équation intégrale :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\mathbf{X}(t),t\right)dt \qquad t \geq t_0$$

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Méthode d'Euler

- La plus simple
- La plus intuitive
- Pas donné h
- Étant donné $\mathbf{X}_0=\mathbf{X}(t_0)$, avancer d'un pas :

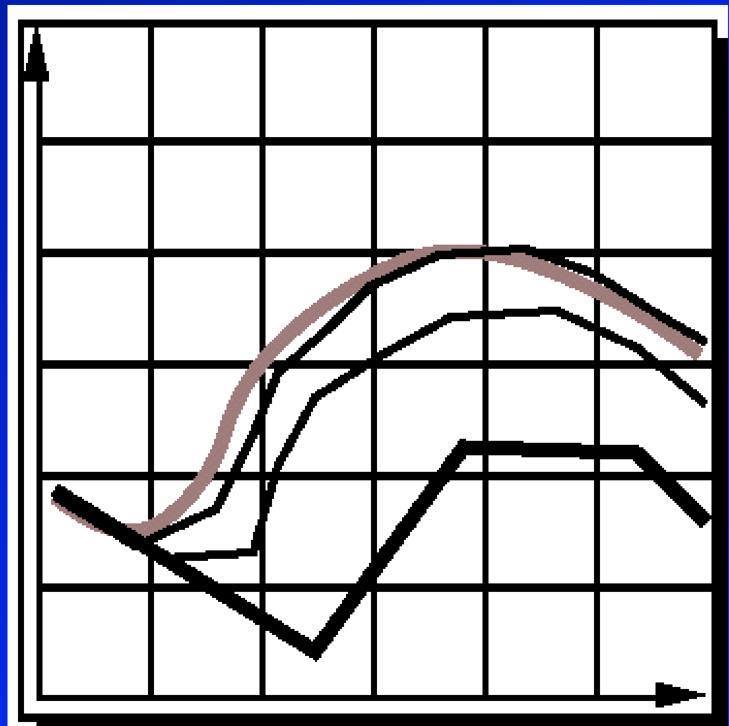
$$t_1 = t_0 + h$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0)$$

- Approximation linéaire par morceaux de la trajectoire

La taille des pas

- Contrôle la précision
- Petits pas :
  - Suit la courbe de plus près
- Pour l'animation :
  - Beaucoup de pas par image



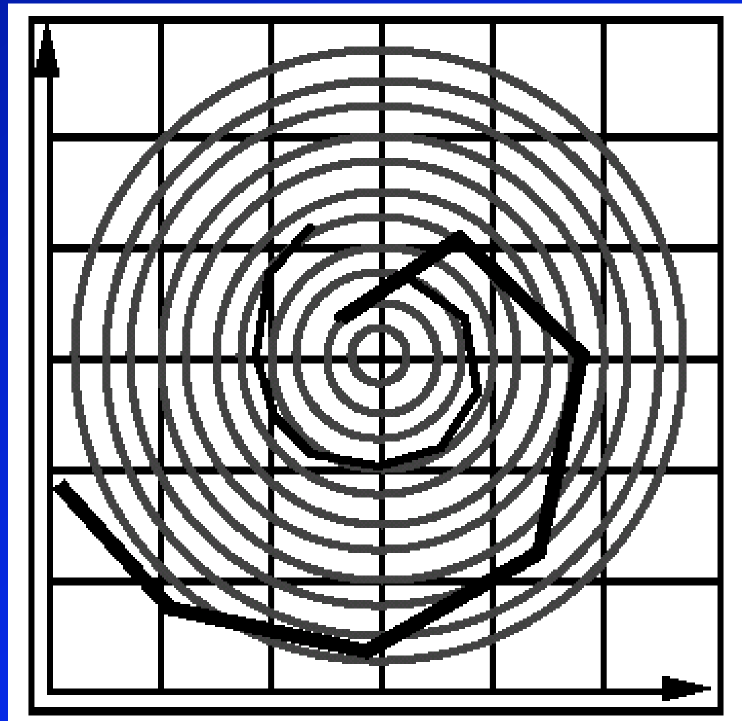
Méthode d'Euler : précision

- Suit la tangente, s'éloigne de la courbe
  - par exemple :

$$f(\mathbf{X},t) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Solution exacte : un cercle

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t+k) \\ r\sin(t+k) \end{pmatrix}$$



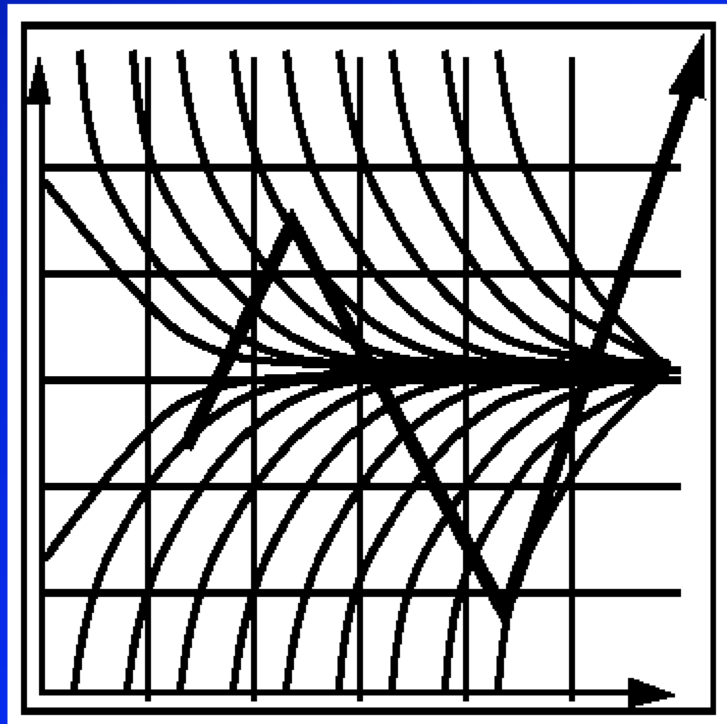
- Euler part en spirale, même avec pas très petit

Méthode d'Euler : instable

$$f(x,t) = -kx$$

- La solution exacte est une exponentielle :

$$x(t) = x_0 e^{-kx}$$



- En fonction de la taille du pas

$$x_1 = x_0(1 - kh)$$

$$\begin{cases} h \ll 1/k & \text{ok} \\ \mathrm{h} > 1/\mathrm{k} & \text{oscillations } +/- \\ \mathrm{h} > 2/\mathrm{k} & \text{divergence} \end{cases}$$

- Plus *k* est grand, plus *h* doit être petit

Analyse de l'erreur

- Série de Taylor :

$$\mathbf{X}(t_0+h)=\mathbf{X}(t_0)+h\left(\tfrac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0}+\frac{h^2}{2!}\left(\tfrac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0}+\frac{h^3}{3!}\left(\tfrac{d^3}{dt^3}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0}+\cdots$$

- La méthode d'Euler approxime linéairement :

$$\mathbf{X}(t_0+h)=\mathbf{X}(t_0)+hf(\mathbf{X}_0,t_0), \qquad \text{Erreur en } O\left(h^2\right)$$

  - Pas divisé par 2, erreur divisée par 4
  - Deux fois plus de pas
  - Erreur totale divisée par 2
- Approximation d'ordre 1 : précision en O(h)
  - Nombre d'étapes en 1/précision

Méthodes d'ordre 2

- Prendre un terme de plus dans la série :

$$\mathbf{X}(t_0+h)=\mathbf{X}(t_0)+h\left(\tfrac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0}+\frac{h^2}{2!}\left(\tfrac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0}+O\left(h^3\right)$$

- Dérivation :

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0} &= \left(\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\right)\right)_{t_0}\\
&= \left(\tfrac{d}{dt}f\left(\mathbf{X}(t),t\right)\right)_{t_0}\\
&= \left(\tfrac{\partial}{\partial \mathbf{X}}f\left(\mathbf{X}(t),t\right)\right)_{\mathbf{X}_0}\left(\tfrac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0}+\left(\tfrac{\partial}{\partial t}f\left(\mathbf{X}_0,t\right)\right)_{t_0}\\
&= \left(\tfrac{\partial}{\partial \mathbf{X}}f\left(\mathbf{X}(t),t\right)\right)_{\mathbf{X}_0}f\left(\mathbf{X}_0,t_0\right)+\left(\tfrac{\partial}{\partial t}f\left(\mathbf{X}_0,t\right)\right)_{t_0}
\end{aligned}$$

Méthodes d'ordre 2 (suite)

- On ne veut pas calculer les dérivées de $f(\mathbf{X},t)$
- On utilise encore Taylor :

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{X}_0+\Delta\mathbf{X},t_0+\Delta t)\\
&= f(\mathbf{X}_0,t_0)+\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}f(\mathbf{X},t_0)\right]_{\mathbf{X}_0}\Delta\mathbf{X}+\left[\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{X}_0,t)\right]_{t_0}\Delta t+O(\Delta^2)
\end{aligned}
$$

- On prend $\Delta x=hf(\mathbf{X}_0,t_0)$, $\Delta t=h$:

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{X}_0+hf(\mathbf{X}_0,t_0),t_0+h)-f(\mathbf{X}_0,t_0)\\
&=\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}f(\mathbf{X},t_0)\right]_{\mathbf{X}_0}hf(\mathbf{X}_0,t_0)+\left[\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{X}_0,t)\right]_{t_0}h+O(h^2)\\
&=h\left[\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}(t)\right]_{t_0}+O(h^2)
\end{aligned}
$$

Méthodes d'ordre 2 (suite)

- On combine :

$$\mathbf{X}(t_0+h)=\mathbf{X}(t_0)+h\left(\tfrac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0}+\frac{h^2}{2!}\left(\tfrac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}(t)\right)_{t_0}+O\left(h^3\right)$$

$$h\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}(t)\right)=f(\mathbf{X}_0+hf(\mathbf{X}_0,t_0),t_0+h)-f(\mathbf{X}_0,t_0)+O(h^2)$$

- Posons :

$$\begin{aligned} f_0 &= f(\mathbf{X}_0,t_0) \\ f_1 &= f(\mathbf{X}_0+hf_0,t_0+h) \end{aligned}$$

- Alors :

$$\mathbf{X}(t_0+h)=\mathbf{X}_0+\frac{h}{2}(f_0+f_1)+O(h^3)$$

- Méthode du *Trapèze*, ou Euler amélioré.

Méthodes d'ordre 2 (suite)

- On aurait pu aussi prendre

  $\Delta x=(h/2)f(\mathbf{X}_0,t_0)$, $\Delta t=h/2$:

- Et on réarrange de la même façon, on pose :

$$\boxed{\begin{aligned} f_0 &= f(\mathbf{X}_0,t_0) \\ f_m &= f(\mathbf{X}_0+\tfrac{h}{2}f_0,t_0+\tfrac{h}{2}) \end{aligned}}$$

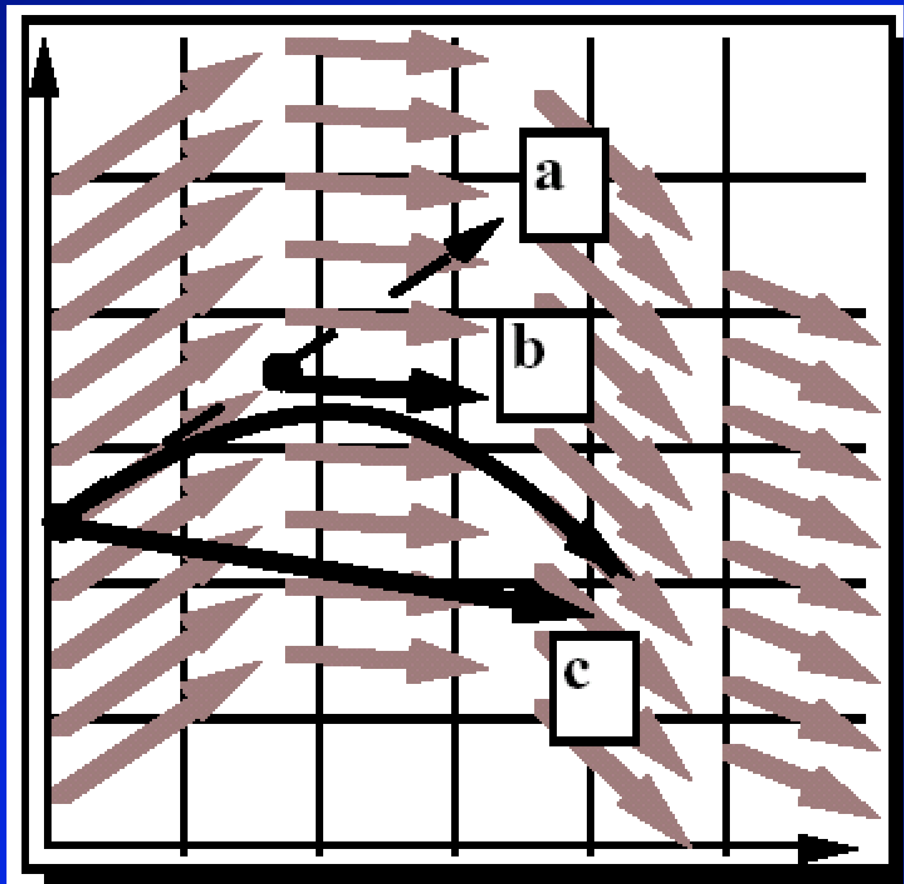
- On obtient :

$$\boxed{\mathbf{X}(t_0+h)=\mathbf{X}_0+hf_m+O(h^3)}$$

- Méthode du *point milieu*

Méthodes d'ordre 2

- Point milieu :
  - 1/2 pas Euler
  - Évaluer f en $\mathbf{X}_m$
  - 1 pas avec f_m
- Trapèze :
  - 1 pas Euler
  - Évaluer f_l
  - 1 pas avec f_l
  - Moyenne



Méthode du point milieu

Note : programmation

- Méthode d'Euler
  - appels à $f(\mathbf{X},t)$ pour **X** sur la position courante
  - f peut utiliser la position courante
  - Variables globales
  - Facile à écrire
- Autres méthodes :
  - Plusieurs appels à $f(\mathbf{X},t)$
  - Par sur la position courante
  - f ne doit pas utiliser ni modifier la position
  - Passage de paramètres
  - Plus difficile à écrire

Efficacité

- Évaluer $f(\mathbf{X},t)$ est l'étape la plus coûteuse
- Méthodes d'ordre 2 font 2 évaluations par pas
  - 2 fois plus cher ?
- À précision donnée :
  - Nombre de pas en 1/sqrt(précision)
  - Résultat : rentable

Runge-Kutta

- Même principe, à des ordres plus élevés
- Ordre 4 :

$$\begin{aligned}
f_0 &= f(\mathbf{X}_0, t_0) \\
f_1 &= f(\mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{2} f_0, t_0 + \tfrac{h}{2}) \\
f_2 &= f(\mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{2} f_1, t_0 + \tfrac{h}{2}) \\
f_3 &= f(\mathbf{X}_0 + h f_2, t_0 + h) \\
\mathbf{X}(t_0 + h) &= \mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{6}(f_0 + 2 f_1 + 2 f_2 + f_3)
\end{aligned}$$

- C'est ce qu'on utilise en général

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Pas variable

- Comment choisir le pas *h* ?
  - Trop large : erreurs, instabilité, divergence…
  - Trop petit : on n'avance pas, long temps de calcul
- On veut un pas idéal :
  - Aussi grand que possible sans trop d'erreur
  - Lié aux raideurs des équations
  - Le pas idéal peut varier au cours du temps

Pas variable

- Le pas idéal peut varier, adaptons-nous :
  - grand pas dans les endroits « faciles »
  - petit pas dans les endroits « difficiles »
- Adapter la taille du pas aux difficultés
  - Automatiquement,
  - En cours de résolution, en fonction des calculs
    - Comment décider ?

Pas variable automatique

- On part avec un pas h
  - On fait une itération,
  - On estime l'erreur commise
  - Erreur grande :
    - On diminue h,
    - On recommence
  - Erreur petite :
    - On accepte le résultat,
    - Éventuellement on augmente h

Comment estimer l'erreur?

- On calcule l'itération par deux méthodes :
  - Euler avec un pas h
  - Euler avec deux pas $h/2$
  - Erreur estimée = différence des deux valeurs :

$$\mathrm{Err}=|\mathbf{X}_a-\mathbf{X}_b|$$

- Ce n'est qu'une estimation :
  - Facile à calculer
  - Peut être prise en défaut
  - Raisonnablement efficace

Choix d'un nouveau pas *h*

- Pour une méthode d'ordre j, erreur en $O(h^{j+1})$:
  - Tolérance donnée *tol*

$$err = C h_{\text{old}}^{j+1} \qquad tol = C h_{\text{new}}^{j+1}$$

$$C \approx \frac{err}{h_{\text{old}}^{j+1}} \approx \frac{tol}{h_{\text{new}}^{j+1}}$$

$$h_{\text{new}} = h_{\text{old}} \left(\frac{tol}{err} \right)^{\frac{1}{j+1}}$$

- En pratique :
  - On prend h un peu en dessous : $h_{\text{new}} = h_{\text{old}} (0.8(tol/err))^{\frac{1}{j+1}}$
  - On ne change pas trop vite : $h_{\text{new}} \in [0.1 h_{\text{old}}, 2.0 h_{\text{old}}]$
  - On a des limites absolues : $h_{\text{new}} \in [h_{\min}, h_{\max}]$

Pour l'animation

- On a besoin des valeurs à intervalles réguliers

$$t_{f_1}, t_{f_2}, \ldots \qquad t_{f_i} = t_{f_{i\text{-}1}} + df$$

- On peut s'assurer de ne pas dépasser l'image

$$h \leftarrow \min(h_{\min}, t_{f_i} - t)$$

  – Valable si $h << df$

- On peut dépasser l'image, puis interpoler en arrière :

$$\mathbf{X}(t_{f_i}) = \frac{t_{f_i} - (t - h)}{h}(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t - h)) \qquad t - h < t_{f_i} < t$$

  – Valable si $h \approx df$

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Méthodes implicites

- Exemple du ressort de rappel :

  $f(x,t)=-kx, \quad x(t_0) = c$

  – Décroissance exponentielle

  – Toutes les méthodes explicites sont instables pour k grand

  – Méthodes à pas variable :

    - N'explose pas
    - Le pas est très petit (temps de calcul très long)

Méthodes implicites

- Autre exemple :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -ky \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} c \\ 0.00001 \end{pmatrix}$$

  - Une particule qui se déplace sur l'axe des x
  - y est presque nul, rien ne se passe
  - Mais les méthodes explicites doivent travailler à des pas très petits
  - On n'avance pas

Équations rigides

- Exemples de systèmes *rigides* :
  - Pas de définition simple
    - Terme en -*k* grand
    - Échelle différente suivant les variables
  - Problème difficile et instable
  - Souvent avec ressorts de rappel à constante élevée
- À éviter, si possible :
  - En général impossible
  - Instabilité liée à la partie la plus rigide de la scène

Euler Implicite

- On connaît $\mathbf{X}_0$, t_0, h, $t_1 = t_0 + h$
- Méthode d'Euler explicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0)$$

- Méthode d'Euler implicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_1, t_1)$$

  - On utilise la dérivée à la fin du pas
  - $\mathbf{X}_1$ est défini par une équation implicite

Euler implicite, suite

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_1, t_1)$$

$$\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}, t_1)$$

$$\Delta\mathbf{X} = hf(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}, t_1)$$

$$\frac{1}{h}\Delta\mathbf{X} = f(\mathbf{X}_0, t_1) + \left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}} f(\mathbf{X}, t_1)\right]_{\mathbf{X}_0} \Delta\mathbf{X} + O(\Delta\mathbf{X}^2)$$

$$\left(\tfrac{1}{h}\mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1)\right)\Delta\mathbf{X} = f(\mathbf{X}_0, t_1)$$

$$\Delta\mathbf{X} = \left(\tfrac{1}{h}\mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1)\right)^{-1} f(\mathbf{X}_0, t_1)$$

Euler implicite, suite

- Méthode d'Euler implicite :

$$\boxed{\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \left(\tfrac{1}{h}\mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1)\right)^{-1} f(\mathbf{X}_0, t_1)}$$

  – Besoin de calculer $\mathbf{J}(\mathbf{X},t)$ en plus de $f(\mathbf{X},t)$
  – Inversion de matrice $n \times n$ à chaque étape
    - **J** souvent creuse, inverse en *O(n)*
    - **J** souvent mal conditionnée ou singulière
  – Programme plus compliqué
  – Mais… système <u>très</u> stable

Stabilité pour Euler implicite

- Décroissance exponentielle :

$$f(x,t) = -kx \qquad \mathbf{J}(x,t) = -k$$

- Avec la méthode d'Euler implicite :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \left(\tfrac{1}{h} - \mathbf{J}(x_0,t)\right)^{-1} f(x_0,t) \\
&= x_0 + \left(\tfrac{1}{h} + k\right)^{-1}(-kx_0) \\
&= x_0 + \left(\frac{h}{1+hk}\right)(-kx_0) \\
&= x_0\left(\frac{1}{1+hk}\right)
\end{aligned}$$

  – Pas de limites sur *h*

  – Pas arbitrairement grands sans divergence

Précision/stabilité

- On a augmenté la *stabilité*
- La *précision* reste faible
  - Comme l'explicite, d'ailleurs
- Tendance à *couper les tournants* :
  - Spirale vers l'intérieur au lieu de l'extérieur
  - Diminue les hautes fréquences
  - Dans les simulations physiques, dissipation d'énergie

Trapèze implicite

- Trapèze explicite :

$$\mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}_0 + \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + O(h^3)$$

$$\mathbf{X}_1 \square \tfrac{h}{2} f(\mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0), t_1) \square \mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{2} f(\mathbf{X}_0, t_0)$$

- Trapèze implicite :

$$\mathbf{X}_1 \square \tfrac{h}{2} f(\mathbf{X}_1, t_1) = \mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{2} f(\mathbf{X}_0, t_0)$$

  - Un demi-pas en arrière, un demi-pas en avant
  - Rencontre des demi-pas

Trapèze implicite, suite

- Comme pour Euler implicite :

$$\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \tfrac{h}{2} f(\mathbf{X}_0, t_0) + \tfrac{h}{2} f(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}, t_1)$$

$$\frac{2}{h}\Delta\mathbf{X} = f(\mathbf{X}_0, t_0) + \left(f(\mathbf{X}_0, t_0) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1)\Delta\mathbf{X}\right) + O(\Delta\mathbf{X}^2)$$

$$\Delta\mathbf{X} = \left(\tfrac{2}{h}\mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{X}_0, t_0) + f(\mathbf{X}_0, t_1)\right)$$

$$\boxed{\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \left(\tfrac{2}{h}\mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{X}_0, t_0) + f(\mathbf{X}_0, t_1)\right)}$$

Point-milieu implicite

- Point-milieu explicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\tfrac{1}{2}\mathbf{X}_0 + \tfrac{1}{2}(\mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0)), t_0 + \tfrac{h}{2})$$

- Point-milieu implicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\tfrac{1}{2}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1), t_0 + \tfrac{h}{2})$$

  – La tangente au milieu du début et de la fin doit passer par le début et la fin.

Point-milieu implicite, suite

- Comme pour Euler et trapèze :

$$\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0 + \tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{X}, t_0 + \tfrac{h}{2})$$

$$\frac{1}{h}\Delta\mathbf{X} = f(\mathbf{X}_0, t_0 + \tfrac{h}{2}) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_0 + \tfrac{h}{2})\left(\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{X}\right) + O(\Delta\mathbf{X}^2)$$

$$\Delta\mathbf{X} = \left(\tfrac{1}{h}\mathbf{I} - \tfrac{1}{2}\mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_0 + \tfrac{h}{2})\right)^{-1} f(\mathbf{X}_0, t_0 + \tfrac{h}{2})$$

$$\boxed{\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \left(\tfrac{1}{h}\mathbf{I} - \tfrac{1}{2}\mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_0 + \tfrac{h}{2})\right)^{-1} f(\mathbf{X}_0, t_0 + \tfrac{h}{2})}$$

Runge-Kutta implicite

Équations d'ordre 2

- Théoriquement, doublement de la dimension :

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{1}{m}F$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X},t) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}F(x,v,t) \end{bmatrix}$$

- Avec méthodes implicites, matrice $2n \times 2n$
  - On peut passer à matrice $n \times n$

ODE d’ordre 2 et méthodes implicites

$$\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{X}\\ \Delta\mathbf{V}\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix}\mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V}\\ f(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}, \mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V})\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}, \mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V}) = f(\mathbf{X}_0) + \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}} f(\mathbf{X},\mathbf{V})\right)\bigg|_{(\mathbf{X}_0,\mathbf{V}_0)}\Delta\mathbf{X} + \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{V}} f(\mathbf{X},\mathbf{V})\right)\bigg|_{(\mathbf{X}_0,\mathbf{V}_0)}\Delta\mathbf{V}$$

$$\frac{1}{h}\Delta\mathbf{V} = f(\mathbf{X}_0) + \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}} f(\mathbf{X},\mathbf{V})\right)\bigg|_{(\mathbf{X}_0,\mathbf{V}_0)} h\left(\mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{V}} f(\mathbf{X},\mathbf{V})\right)\bigg|_{(\mathbf{X}_0,\mathbf{V}_0)}\Delta\mathbf{V}$$

$$\left(\mathbf{I} - h\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{V}} f(\mathbf{X},\mathbf{V})\right)\bigg|_{(\mathbf{X}_0,\mathbf{V}_0)} - h^2\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}} f(\mathbf{X},\mathbf{V})\right)\bigg|_{(\mathbf{X}_0,\mathbf{V}_0)}\right)\Delta\mathbf{V} = h\left(f(\mathbf{X}_0) + h\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}} f(\mathbf{X},\mathbf{V})\right)\bigg|_{(\mathbf{X}_0,\mathbf{V}_0)}\mathbf{V}_0\right)$$

- Matrice $n\times n$ avec solution en ΔV
  - Ensuite, $\Delta\mathbf{X}=h(\mathbf{V}_0+\Delta\mathrm{V})$

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

En résumé

- Plusieurs méthodes de résolution
  - Il en existe beaucoup d'autres :
    - Méthodes à pas liés : les valeurs voisines ont une influence
    - prédiction/correction, valeurs limites…
    - Ordre adaptatif
- Plus le problème est compliqué, plus il faut comprendre la théorie
  - Beaucoup de théorie
  - Heureusement, il y a la bibliothèque

Comparatif

- Runge-Kutta d’ordre 4 :
  - Souvent la réponse par défaut
  - Bon rapport qualité/prix
  - Mais pas une réponse universelle !
- Euler :
  - Beaucoup de défauts
  - Déconseillée pour presque tout
  - Mais tellement rapide à implémenter
  - Et si ça marche ?

Tout va mal si…

- La fonction *f* n'est pas lisse
  - Aucune de ces méthodes ne peuvent traiter les discontinuités
  - La taille du pas descend jusqu'au minimum
    - (pour les méthodes à pas adaptatif)
- La solution peut avoir des discontinuités :
  - Choc rigide entre solides, impulsion
  - Comment faire ?

Pour l'animation

- Beaucoup d'applications :
  - Lois de la dynamique appliquées aux objets
  - Animation sans animateur
    - Mais aussi sans contrôle
  - Systèmes de particules : grande dimension
  - L'essentiel : que le mouvement soit beau
    - La précision physique est secondaire
- Un outil, parmi d'autres