
TABLE DES MATIÈRES

Notations	5
Introduction	7
Contexte	7
Motivations	8
Simulation multirésolution	9
Objectifs de cette thèse	9
Organisation du document	10
1 Travaux antérieurs	11
1 Déformations géométriques de la surface	11
1.1 Surfaces de forme libre	11
1.2 Les déformations de l'espace	12
1.3 Surfaces implicites	12
1.4 Conclusion	13
2 Déformations globales	13
2.1 Dynamique modale	13
2.2 Déformation globale dynamique	14
2.3 Conclusion	14
3 Les modèles masses-ressorts	14
3.1 Principe	14
3.2 Raffinements du modèle	15
3.3 Conclusion	15
4 Les systèmes de particules	16
4.1 Principe	16
4.2 Conclusion	17
5 Le modèle SPH	17
5.1 Passage du continu au discret	17
5.2 L'équation d'état du matériau	18
5.3 Simulation multirésolution des SPH	18
5.4 Conclusion	19
6 Les modèles continus	19
6.1 Minimisation de l'énergie de déformation	19
6.2 Conclusion	20
7 Les éléments finis	20
7.1 Principe	20

7.2	Applications	22
7.3	Conclusion	24
8	Modèles à couches	25
8.1	Principe	25
8.2	Conclusion	25
9	Applications interactives	26
10	La multirésolution en animation	27
10.1	Plusieurs façons de faire de la multirésolution	27
10.2	Difficultés	27
10.3	Adaptatif <i>versus</i> Hiérarchique	28
10.4	Utilisations de la multirésolution	28
11	Choix d'un modèle	29
11.1	Méthodes interactives	29
11.2	Le temps réel vrai	29
11.3	Nécessité de la multirésolution	30
11.4	Modèle indépendant de la résolution.	30
12	Conclusion générale	31
2	Notions d'élasticité linéaire	33
1	Le tenseur des déformations	34
1.1	Le tenseur de Cauchy	34
1.2	Le tenseur de Green-Lagrange	35
1.3	Comparaison des deux modèles	36
2	Le tenseur des contraintes	38
2.1	Définition	39
2.2	Force et accélération	39
3	La loi de comportement	40
3.1	Définition	40
3.2	La loi de Hooke	40
3.3	Équation de Navier	41
3.4	Interprétation	42
4	Frottements	42
4.1	Le tenseur des taux de déformation	42
4.2	Le tenseur des contraintes	42
4.3	La loi de comportement	43
5	Conclusion	43
3	Premier modèle multirésolution	45
1	Calcul du laplacien	46
1.1	Dérivée seconde scalaire	46
1.2	Passage en trois dimensions	46
1.3	Laplacien d'un champ vectoriel	47
2	Extension au grad (div)	47
2.1	Projection le long de l'axe	48
3	Simulation à résolution fixe	48
3.1	Cas d'école	48
3.2	Ajout de forces dissipatives	49
4	Simulation multirésolution	50
4.1	Création des maillages	50
4.2	Définition des voisins	51
4.3	Simulation adaptative	52
4.4	Position relative mère-fille	53
4.5	Changement de résolution	54
4.6	Mise à jour de la structure	55
5	Multirésolution temporelle	55
5.1	Critère de Courant	55
5.2	Synchronisation et mise en œuvre	56

5.3	Critère de stabilité d'intégration	56
6	Résultats	56
6.1	Premiers essais	56
6.2	Cas d'école	57
6.3	Une application temps-réel	57
7	Discussion	58
7.1	Indépendance de la résolution	58
7.2	Une méthode hiérarchique	59
7.3	Problème avec le grad(div)	60
8	Conclusion	61
4	Nouveaux opérateurs différentiels	63
1	Le théorème de Gauss	63
1.1	Expression mathématique	63
1.2	Définition du volume	64
1.3	Champ linéaire par morceaux	64
2	Calcul du laplacien	65
2.1	Principe	65
2.2	Expression en 2D	65
2.3	Intégrale sur tout le contour	66
2.4	Mise en œuvre	67
2.5	Interprétation	67
2.6	Qualité de l'opérateur	68
3	Calcul du grad(div u)	69
3.1	Principe	69
3.2	Calcul du gradient	69
3.3	Calcul de la divergence	70
3.4	Intégrale sur tout le contour	70
3.5	Mise en œuvre	71
3.6	Interprétation	71
3.7	Qualité de l'opérateur	72
4	Extension à trois dimensions	73
4.1	Expression des opérateurs	73
4.2	Expression de la force	74
4.3	Mauvaise définition de la région de Voronoï	75
4.4	Création des régions de Voronoï	75
5	Comparaison avec les éléments finis	77
5.1	Éléments finis explicites	77
5.2	Réécriture des masses-tenseurs	78
5.3	Comparaison en 2D	79
5.4	Comparaison en 3D	80
6	Création d'un modèle hybride	82
6.1	Inspiration	82
6.2	Comportement	82
7	Comparaison des différentes formulations	83
7.1	Protocole de test	83
7.2	Les différents modèles comparés	84
7.3	Résultats	84
8	Conclusion	90
5	Modèle multirésolution hiérarchique	91
1	Idée générale	91
2	Cohabitation de différents maillages	92
2.1	Création des maillages	92
2.2	Interface entre deux maillages	92
2.3	Les points fantômes	93
3	Adaptation de la simulation	94

3.1	Structure de données hiérarchique	94
3.2	Subdivision et regroupement d'un point	95
3.3	Critères de subdivision-regroupement	96
4	Raffinements du modèle	96
4.1	Utilisation d'un octree non restreint	96
4.2	Mise à jour des points fantômes	97
4.3	Intégration temporelle	97
5	Simulation temps-réel	99
5.1	Parallélisation	99
5.2	Temps-réel vrai	100
6	Résultats	100
7	Conclusion	101
6	Interface avec l'utilisateur	103
1	Affichage de la surface	103
1.1	Liaison avec les particules	103
2	Collisions avec l'outil	105
2.1	Détection de la collision	105
2.2	Réponse à la collision	106
3	Retour d'effort	107
3.1	Principe	107
3.2	Lissage de la force	107
4	Conclusion	108
	Conclusion	111
	Résumé des contributions	111
	Travaux futurs	112
	Pour conclure	114
A	Rappels sur les opérateurs différentiels	117
1	Dérivées par rapport au temps	117
1.1	Opérateurs du premier ordre	117
1.2	Opérateurs du second ordre	117
2	Dérivées par rapport à l'espace	117
2.1	Opérateurs du premier ordre	117
2.2	Opérateur Nabla	118
2.3	Opérateurs du second ordre	118
B	Les méthodes d'intégration	119
1	Difficultés	119
2	Dépendance de l'intégration	119
3	Intégration explicite	120
4	Intégration implicite	121
C	Green-Lagrange en pratique	123
1	Rappels d'élasticité	123
2	Forces dissipatives	124
3	Éléments finis explicites	124
	Table des matières	127
	Table des figures	131
	Bibliographie	135

TABLE DES FIGURES

1	Équipement d'une salle de simulation laparoscopique ©Épidaure - INRIA.	8
1.1	Quatre points de contrôle, la spline d'interpolation qui passe par eux (à l'extérieur) ainsi que la courbe de Bézier qu'ils définissent, tangentes au départ et à l'arrivée au polygone de contrôle (à l'intérieur).	12
1.2	Déformation de l'espace illustrée sur un modèle de girafe : la grille originale (a) et celle obtenue après une déformation localisée (b).	12
1.3	Discrétisation d'un objet 2D à l'aide de masses-ressorts.	14
1.4	Intensité de la force résultant d'un potentiel de Lennard-Jones en fonction de la distance. . . .	16
1.5	Chaque particule peut se diviser en plusieurs autres (a). Le regroupement est possible lorsque la forme est globalement sphérique (b).	18
1.6	Les fonctions de base ont une forme triangulaire en 1D (seules celles associées aux sommets encadrés sont représentées) (a). Leur somme pondérée crée la fonction linéaire par morceaux qui approxime la fonction continue (b).	21
1.7	Simulation de laparoscopie hépatique utilisant les masses-tenseurs.	24
1.8	Une juxtaposition de maillons imbriqués forme le <i>ChainMail</i>	27
1.9	Parmi toutes les résolutions possibles, l'adaptatif (a) ne simule que le niveau le plus fin (points) alors qu'en hiérarchique (b), les niveaux inférieurs continuent à être actifs et cohabitent avec le niveau fin.	28
2.1	Un champ de déplacement dans un cube en 3D, représenté en chaque point par un vecteur. . . .	34
2.2	Le cube dans sa position de repos. Vues de face et de profil des points qui vont être simulés. . .	37
2.3	La position d'équilibre finale du cube lorsqu'on ajoute du frottement interne est différente en utilisant Cauchy (a) et Green-Lagrange (b).	37
2.4	Images de l'animation d'un cube sous l'action de la gravité avec le tenseur de Cauchy.	38
2.5	Images de l'animation d'un cube sous l'action de la gravité avec le tenseur de Green-Lagrange. . . .	38
2.6	Décomposition de la force agissant sur un élément de surface dS défini par sa normale \mathbf{n}	39
2.7	Type de comportement d'un matériau au delà des hypothèses de linéarité.	40
2.8	Évolution de λ et μ lorsque ν varie entre 0 et 0.5, pour un E donné. Noter que λ tend vers l'infini pour des matériaux incompressibles ($\nu = 0.5$).	41
3.1	Le champ de déplacement peut être séparé en deux composantes : la radiale, créée par les forces de pression, et la rotationnelle, créée par les forces de cisaillement.	47
3.2	\mathbf{y} s'écrit comme la somme de deux vecteurs orthogonaux en fonction du vecteur unitaire \mathbf{x}	48
3.3	L'altitude de l'un des coins du cube (indiqué par une flèche) lors de la simulation, pour différents maillages réguliers. Aucun frottement n'a été ajouté dans cette simulation.	49
3.4	Un même cube sera échantillonné par huit particules filles ou par leur mère.	50

3.5	Création récursive des maillages. La grille régulière qui sert à créer le maillage le plus fin (a). On regroupe ensuite les particules pour créer les maillages suivants (b), (c) et (d). Les tailles représentent la masse des particules.	51
3.6	Durant la simulation, les voisins d'une particule ne peuvent appartenir qu'au même niveau de résolution, au niveau supérieur ou au niveau inférieur.	51
3.7	Les 56 voisines de niveau inférieur (a), les 26 voisines de même niveau (b) et les 7 voisines de niveau supérieur (et les "sœurs") (c) d'une particule donnée.	52
3.8	Le système de coordonnées locales (flèches), défini par les voisines de la mère assure un bon placement des filles, même lorsque l'objet est déformé.	53
3.9	Un parallélépipède déformé par un outil. Les résolutions comportent entre 24 et 1056 particules (a). La discrétisation qui a lieu au contact de l'outil durant la simulation est intuitive.	57
3.10	Une tige oscillant sous la gravité. Simulation de référence faite avec 256 particules (a). Images de la simulation adaptative (b).	57
3.11	Illustration de la répartition intuitive des particules lors d'une déformation. Le niveau des particules est représenté par la taille des cubes les symbolisant (a) ou par la couleur des nœuds de la surface auxquels elles sont reliées (b). La flèche représente la force renvoyée à l'utilisateur.	58
3.12	Bien que les contraintes imposées dépassent parfois le formalisme des petites déformations, notre modèle présente néanmoins une réponse d'une bonne qualité visuelle à l'utilisateur. L'ajout de textures augmente sensiblement le réalisme du simulateur.	58
3.13	L'adaptatif (a) ne simule que le niveau le plus fin choisi alors qu'en hiérarchique (b), les niveaux inférieurs continuent à être actifs et cohabitent.	59
4.1	Le point i représentera les valeurs du champ à l'intérieur de sa région de Voronoï.	64
4.2	On décompose l'intégrale sur le contour en la somme des intégrales sur les demi-arêtes. m est l'orthocentre du triangle, j' et k' les milieux des arêtes.	65
4.3	On utilise les angles α , β et γ pour obtenir une expression en fonction de \hat{k}	66
4.4	Les cotg des angles opposés à l'arête viennent pondérer la contribution d'un voisin.	66
4.5	Représentation des iso-valeurs du coefficient pondérateur d'un point j sur le laplacien calculé en i en fonction de la position de j	68
4.6	Le gradient de la fonction de base d'un sommet est dirigé selon la normale à l'arête opposée.	70
4.7	Le point i va se déplacer pour compenser au mieux la variation d'aire due aux déplacements de ses voisins.	72
4.8	Le milieu de la hauteur ih (carré) et celui de l'arête (j', k') (cercle) ne coïncident que dans le cas où le triangle est isocèle en i	73
4.9	La surface de Voronoï intersecte chaque tétraèdre T en formant 3 polygones orthogonaux aux arêtes. Ils passent par les milieux des arêtes, les orthocentres des faces et l'orthocentre du tétraèdre. On a ici supprimé la face avant du tétraèdre pour montrer les polygones intérieurs.	74
4.10	La région de Voronoï peut se trouver à l'extérieur du triangle si l'angle dépasse 90°	75
4.11	Les tétraèdres composant l'objet (a) et la région de Voronoï associée au point central (b).	75
4.12	Les arêtes extérieures sont coupées aux limites de l'objet en plusieurs étapes : région de Voronoï complète pour un des sommets du bord (a), suppression des facettes externes (b) et projection sur la surface (c).	76
4.13	Des exemples de régions de Voronoï obtenus sur différents maillages.	76
4.14	La région associée au point central d'un cube composé de 9 (a) (comparer avec la Figure 4.11b) et 57 (b) points régulièrement répartis.	77
4.15	La différence de calcul de l'opérateur grad div entre les deux méthodes tient au calcul pondéré d'une normale à la <i>face</i> du tétraèdre pour les éléments finis (a) qui est remplacé dans notre approche par la somme pondérée des trois normales des facettes de Voronoï (b).	82
4.16	Les positions extrêmes atteintes par un cube soumis à l'action de la gravité en utilisant les éléments finis explicites et le tenseur de Cauchy (a) et la version hybride que nous proposons par analogie avec les résultats de la méthode de Voronoï (b). La première ligne montre le vecteur déplacement de chaque point.	83
4.17	Trois résolutions différentes vont être simulées. Le niveau 0 a 27 points (a), le niveau 1 en a 57 (b) et le niveau 2, 135 (c).	84
4.18	Simulation avec le tenseur de Cauchy.	84
4.19	Tenseur de Cauchy, sur 15 secondes de simulation. La position en x,y et z du coin du cube fait apparaître un mouvement régulier.	85

4.20	Simulation avec la méthode basée sur les régions de Voronoï et le théorème de Gauss.	85
4.21	Les forces créées par l'opérateur grad ($\text{div } \mathbf{u}$) sont bien celles que l'on attend d'un opérateur assurant une préservation de volume.	86
4.22	On constate une lente divergence de la simulation utilisant l'opérateur grad ($\text{div } \mathbf{u}$) issu de la méthode de Voronoï.	86
4.23	Simulation avec des masses-ressorts. La raideur est une même constante pour tous les ressorts.	87
4.24	Simulation avec des masses-ressorts. La raideur est proportionnelle à la longueur à vide du ressort.	87
4.25	Simulation avec des masses-ressorts. La raideur est <i>inversement</i> proportionnelle à la longueur à vide du ressort. Noter que pour obtenir des courbes d'amplitudes similaires, on a dû utiliser des raideurs de respectivement 20, 13 et 6 pour les résolutions 0, 1 et 2.	87
4.26	Simulation avec des masses-ressorts. La raideur est calculée selon la formule de Van Gelder [Gel98].	88
4.27	La version hybride du tenseur de Cauchy (le laplacien est calculé à l'aide d'un simple scalaire).	88
4.28	L'introduction de frottements internes n'altère pas le comportement multirésolution de l'opérateur hybride.	89
4.29	Simulation avec le tenseur de Green-Lagrange.	89
4.30	Tenseur de Green-Lagrange avec ajout de forces dissipatives internes.	90
5.1	Le maillage triangulaire original (34700 triangles) est dégradé à différents degrés (ici 550, 130 et 30 triangles), puis maillé volumiquement (1874, 172 et 28 tétraèdres, ligne du bas).	93
5.2	Le voisin F de P est fantôme et sert à P à savoir ce qui se passe à sa droite. Il interpole son déplacement d'après celui des points Q_i du maillage fin.	94
5.3	Liaison des maillages (en 2D) : en fonction des maillages effectivement simulés, le sommet C_1 pourra calculer sa position à partir de celles des points (F_1, F_2, F_3) du maillage fin. Les déformations pourront aussi être propagées aux noeuds du maillage fin : F_1 pourra déduire sa position de celle des points (C_1, C_2, C_3) de son triangle parent.	95
5.4	Les fils d'un point sont les sommets du maillage fin situés dans sa zone de Voronoï. Ce sont eux qui remplaceront le point lorsqu'il se subdivisera. On stockera également la liste des premiers voisins de ces fils.	95
5.5	Un des points (F) du tétraèdre fils de P ne fait pas directement partie des fils de P	97
5.6	La synchronisation décalée des simulations des différents pas de temps permet d'éviter les goulots d'étranglement en répartissant la charge sur toute la simulation.	98
5.7	Le programme principal et le processus chargé de l'animation sont liés par un système de sémaphores assurant leur synchronisation.	100
5.8	Influence de l'augmentation de λ sur la préservation de volume. Les images représentent $\lambda = 0$ (a), $\lambda = 50000$ (b) et $\lambda = 500000$ (c).	100
5.9	L'utilisation des maillages fins, faite d'après des critères liés à la continuité, résulte en une discrétisation intuitive des zones proches de l'outil.	101
5.10	Autre exemple d'objet déformable. Les secousses appliquées sur le ventre de ce bonhomme se répercutent sur ses bras qui oscillent légèrement.	101
6.1	Un noeud de la surface est lié à une particule du modèle interne grâce à un décalage \mathbf{o}	104
6.2	Un noeud de la surface est lié aux différents triangles surfaciques des maillages tétraédriques.	105
6.3	Une caméra placée à l'intérieur de l'outil (a) permet de détecter rapidement les collisions avec l'objet, que l'on considère l'outil comme statique (b) ou dynamique (c).	106
6.4	Pour chacun des triangles intersectés, on calcule le centre de gravité B de la zone d'intersection. Les trois sommets du triangle seront déplacés en fonction des coefficients barycentriques de ce point.	106
6.5	Le Phantom desktop.	107
6.6	Images du simulateur montrant quelques déformations du foie. La Figure (d) montre quelques effets de surface (brûlures, blanchiment, reflets).	108
6.7	D'autres exemples d'animation, aux comportements plus ou moins rigides en fonction des paramètres choisis.	109
6.8	Le rendu final utilise des textures d'environnement qui explicitent la déformation subie (a). Le maillage interne correspondant (b).	109

